GÉPÉSZMÉRNÖKI, INFORMATIKAI ÉS VILLAMOSMÉRNÖKI KAR
ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK

A VÉGESELEM MÓDSZER MECHANIKAI ALKALMAZÁSAI

(NGD_MDA13_1)

Előadásvázlat

a SZE Multidiszciplináris Műszaki Tudományi Doktori Iskola

PhD hallgatói számára

Összeállította

Prof. Dr. János Égert

Győr, 2019

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETÉS ... 5

2. A SZILÁRDSÁGTAN ÉS A RUGALMASSÁGTAN ALAPJAI ... 6
2.1. Alapfogalmak ... 6
2.2. Szilárdságtani állapotok ... 7
2.2.1. Elmozdulási állapot ... 7
2.2.2. Alakváltozási állapot ... 7
2.2.3. Feszültségi állapot ... 9
2.2.4. Alakváltozási energia ... 11
2.3. Rugalmasságtani egyenletek ... 11
2.3.1. Egyensúlyi egyenletek ... 12
2.3.2. Kinematikai egyenlet ... 13
2.3.3. Anyagegyenletek – általános Hooke-törvény ... 14
2.3.4. Peremfeltételek ... 17
2.3.5. Kompatibilitási egyenletek ... 18

3. A RUGALMASSÁGTAN ENERGIA ELVEI ... 19
3.1. Alapfogalmak ... 19
3.1.1. Kinematikailag lehetséges elmozdulásmező ... 19
3.1.2. Statikailag lehetséges feszültségmező ... 19
3.2. A virtuális munka elve ... 20
3.3. A teljes potenciális energia minimuma elv ... 21
3.4. A Lagrange-féle variációs elv ... 24
3.5. A Ritz-módszer ... 26
3.6. A teljes kiegészítő energia minimuma elv ... 30
3.7. A Castigliano-féle variációs elv ... 31
3.8. Közelítő megoldás előállítása a teljes kiegészítő energia minimuma elv felhasználásával ... 33

4. A VÉGESELEM MÓDSZER ELMOZDULÁSMODELLJE ... 34
4.1. Az elmozdulásmezőn alapuló végeselem módszer felépítése ... 34
4.1.1. Jelölések, elnevezések ... 34
4.1.2. A rugalmasságtani feladat kitűzése ... 35
4.1.3. A rugalmasságtani feladat közelítő megoldása ... 35
4.2. A végeselem módszer konvergenciája, mechanikai modellezés ... 45
4.3. Rúdszerkezetek ... 47
4.3.1. Rúdelméletek ... 47
4.3.2. Térbeli rúdszerkezetek, tartószerkezetek – térbeli rúdelem ... 49
4.3.3. Síkbeli rúdszerkezetek, tartószerkezetek – síkbeli rúdelem ... 53
4.3.4. Síkbeli rácsos tartószerkezetek ... 60
4.4. Végeselem programrendszerek általános felépítése ... 66

5. A SZILÁRDSÁGTAN 2D FELADATAI ... 67
5.1. A feladatok értelmezése ... 67
5.1.1. A sík alakváltozási feladat (SA) ... 67
5.1.2. Általánosított síkfeszültség feladat (ÁSF) ... 68
5.1.3. Forgásszimmetrikus feladat (FSZ) ... 69
5.1.4. A 2D feladatok közös jellemzői ... 71
5.1.5. A 2D feladatok különbözőségei ... 71
5.2. Az izoparametrikus közelítés (interpoláció) ... 71
5.3. Interpolációs eljárások ... 75
5.3.1. A Lagrange-féle interpoláció ... 75
5.3.2. Az Hermite-féle interpoláció ... 76

5.4. A „hagyományos” és az izoparametrikus végeselemek összehasonlítása ... 76
5.5. Lineáris és kvadratikus végeselemek 2D (SA, ÁSF, FSZ) feladatok megoldására ... 77
5.6. Numerikus integrálás ... 83
5.7. Kiegészítő megjegyzések 2D feladatokhoz ... 85
5.8. Tengelyszimmetrikus geometriájú, nem tengelyszimmetrikus terhelésű testek feladata ... 87
5.9. Példák ... 87

6. A VÉGESELEM KÖZELÍTÉS PONTOSSÁGÁNAK JAVÍTÁSA, P-VERZIÓS ELEMEK 91
6.1. Fokszám növelés húzott-nyomott rúdelemnél ... 91
6.2. Fokszám növelés húzott-nyomott, hajlított-nyírt rúdelemnél ... 94
6.3. A fokszámnövelés általánosítása síkbeli esetre ... 96

7. TÉRBELI FELADATOK MEGOLDÁSA IZOPARAMETRIKUS ELEMEKKEL ... 100
7.1. Összefoglaló ismétlés ... 100
7.2. Hexaéder elem – leképezés, alakfüggvények ... 100
7.3. Pentaéder elem – leképezés, alakfüggvények ... 101
7.4. Tetraéder elem – leképezések, alakfüggvények ... 101
7.5. Az elemek merevségi mátrixa ... 102
7.6. Az elemek térfogati erőkből származó csomóponti terhelésvektora az *x,y,z* koordináta-rendszerben ... 105
7.7. Az elemek felületi erőkből származó csomóponti terhelésvektora az *x,y,z* koordináta-rendszerben ... 106
7.8. Felületi rugalmas ágyazás figyelembevétele ... 108
7.9. Peremfeltételek figyelembevétele térbeli feladatoknál ... 109

8. MEREVÍTETT LEMEZ- ÉS HÉJSZERKEZETEK ... 111
8.1. Héj / lemez hajlítási elméletek ... 111
8.1.1. A Kirchhoff-Love-féle héj / lemez elmélet ... 111
8.1.2. A Reissner-Mindlin-féle héj / lemez elmélet ... 112
8.2. Felületi feszültségek / élerők és élnyomatékok ... 113
8.3. Izoparametrikus lemezelem ... 115
8.4. Excentrikus kapcsolódás modellezése ... 116
8.5. Izoparametrikus héjelem ... 117
8.6. Rétegelt kompozit héjelem ... 122

9. EGYOLDALÚ ÉRINTKEZÉSI FELADATOK VÉGESELEM MEGOLDÁSA ... 124
9.1. Az egyoldalú kontaktfeladat ... 124
9.2. A súrlódásmentes kontaktfeladat megoldása ... 125
9.3. Az alszerkezet technika / szuperelem technika ... 129
9.4. Súrlódásos kontaktfeladat megoldása iterációval ... 131
9.5. Izoparametrikus kontakt elemek ... 133

10. DINAMIKAI FELADATOK VÉGESELEM MEGOLDÁSA ... 136
10.1. Többszabadságfokú rezgőrendszerek ... 136
10.2. Energiaelvek mozgó kontinuumok esetén ... 136
10.3. A végeselem módszer alkalmazása – a mozgásegyenlet-rendszer és megoldása ... 137
10.4. A végeselem módszer alkalmazása rezgéstani feladatok megoldására ... 142

11. TERMOMECHANIKAI FELADATOK VÉGESELEM MEGOLDÁSA ... 145
11.1. A hőtani feladat megfogalmazása ... 146
11.2. A stacionárius hővezetési feladat megoldása ... 146
11.3.Az instacionárius hővezetési feladat megoldása ... 149

FÜGGELÉK - MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ 152
F.1. Mátrixalgebra 152
F.2. Vektoralgebra 154
F.3. Tenzoralgebra 156
F.3.1. Tenzor értelmezése és előállítása 156
F.3.2. Tenzor előállítása derékszögű descartesi koordináta-rendszerben 157
F.3.3. Tenzorok kétszeres skaláris szorzata 158
F.4. Koordináta-rendszerek 158
F.4.1. Derékszögű descartesi koordináta-rendszer (DDKR) 158
F.4.2. Henger koordináta-rendszer (HKR) 159
F.5. Koordináta transzformáció 159
F.6. Hely szerinti differenciálás 161
F.6.1. Vektor hely szerinti deriváltja DDKR-ben 161
F.6.2. Vektor hely szerinti deriváltja HKR-ben 161
F.7. A Hamilton-féle differenciál operátor (nabla) 161
F.7.1. Divergencia (skaláris szorzás) 161
F.7.2. Rotáció (vektoriális szorzás) 162
F.7.3. Gradiens (diadikus/általános szorzás) 162
F.8. A variációszámítás alapgondolata 163

SZAKIRODALOM 166

1. BEVEZETÉS

A végeselem módszer mechanikai alkalmazásai tárgy a Széchenyi István Egyetem Multidiszciplináris Műszaki Tudományi Doktori Iskolájában emelt szintű szakirányos választható tantárgy, amelyet mindhárom szakirány: a Közlekedési és Járműtudományi, az Építőmérnöki és az Informatikai szakirány doktorandusz hallgatói is felvehetnek.

A végeselem módszer / végeselem analízis a mérnöki szakterület legismertebb és legszélesebb körben alkalmazott közelítő numerikus számítógépes eljárása, amely hatékony segédeszköze a mérnöki szerkezettervezésnek és a mérnöki szerkezetekben lezajló folyamatok analízisének. A számítógépes mérnöki tervező rendszerek szinte mindegyike tartalmaz végeselem módszeren alapuló analízis modulokat. Ezen kívül a szoftver piacon rendelkezésre állnak speciális végeselem programrendszerek is, amelyek mérnöki és természettudományos kutatási igények elmélyültebb kielégítésre is alkalmasak.

A fenti programrendszerek hatékony felhasználásához szükség van azonban a módszer elvi alapjainak, valamint speciális numerikus technikáinak ismeretére is. Ezek ismeretének hiánya modellezési tévedésekhez vezethet, valamint gátolhatja az analízis eredményeinek megértését és kiértékelését.

A tananyag a mérnöki mechanika ismeretanyagára, elsősorban a szilárdságtani, rugalmasságtani, rezgéstani ismeretekre alapozva vezeti be a végeselem módszer alapfogalmait és ismerteti azokat a numerikus eljárásokat, amelyek elsősorban a fenti feladatok megoldásánál van szükség. Feltételezi tehát az egyetemi alapképzés (BSc) Statika, Szilárdságtan, Mozgástan és Rezgéstan tantárgyaiban, illetve az egyetemi mesterképzés (MSc) Alkalmazott Mechanika és Rugalmasságtan tantárgyaiban tanult mechanikai alapok ismeretét. Az előadásvázlat a mechanikai alkalmazások után kitekintést ad a módszer hőtani, termodinamikai alkalmazására is a stacionárius és instacionárius hőtani feladat megoldásával.

A tananyag célja nemcsak az elvi alapok bemutatása, hanem az is hogy az eljárást a doktorandusz hallgatók önállóan legyenek képesek alkalmazni egyszerűbb mérnöki feladatok megoldására. Ezt a félév során kiadott két házi feladat segíti elő. A hagyományos házi feladat a Ritz módszer alkalmazására mutat be példát. A számítógépes házi feladat a felhasznált programrendszertől független módon, elsősorban a mechanikai és végeselem modellezés megfontolásait alkalmazva segíti a tananyag megértését.

A Végeselem módszer mechanikai alkalmazásai tantárgy anyagának elsajátításához a tananyag összeállítója eredményes munkát kíván.

Győr, 2019. december

A tananyag összeállítója